Temas para la Educación
revista digital para profesionales de la enseñanza
Nº 3 - Julio 2009 | Federación de Enseñanza de CC.OO. de Andalucía | ISSN: 1989-4023 | Dep.Leg.: GR 2786-2008

Números famosos II: La Razón Aúrea.

Introducción

El **número áureo** o de oro (también llamado **número dorado**, **razón áurea**, **razón dorada**, **media áurea**, **proporción áurea** y **divina proporción**) representado por la letra griega φ (fi) (en honor al escultor griego Fidias), es el número irracional:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988\,749\,894\,848\,204\,586\,834\,365\,638 \ldots$$

Se trata de un número algebraico que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o proporción. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza en elementos tales como caracolas, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, etc.

Asimismo, se atribuye un carácter estético especial a los objetos que siguen la razón áurea, así como una importancia mística. A lo largo de la historia, se le ha atribuido importancia en diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido objetables para las matemáticas y la arqueología.

1.- Historia del número áureo

Los **pitagóricos** eran una organización griega de astrónomos, músicos, matemáticos y filósofos, que creían que todas las cosas son, en esencia, números. El grupo mantuvo en secreto el descubrimiento de los números irracionales, y la leyenda cuenta que un miembro fue ahogado por no mantener el secreto

Existen numerosos textos que sugieren que el número áureo se encuentra como proporción en ciertas estelas Babilonias y Asirias de alrededor de 2000 a. C. El primero en hacer un estudio formal sobre el número áureo fue Euclides (c. 300-265 a. C.), quién lo definió de la siguiente manera:

"Se dice que una línea recta está dividida en el extremo y su proporcional cuando la línea entera es al segmento mayor como el mayor es al menor."

Euclides en *Los Elementos*.

Euclices demostró también que este número no puede ser descrito como la razón de dos números enteros, es decir es irracional.

En 1509 el matemático y teólogo Luca Pacioli publica su libro *De Divina Proportione* (La Proporción Divina), en el que plantea cinco razones por las que considera apropiado considerar divino al Número áureo:

1. La unicidad; Pacioli compara el valor único del número áureo con la unicidad de Dios.
2. El hecho de que esté definido por tres segmentos de recta, Pacioli lo asocia con la Trinidad.
3. La inconmesurabilidad; para Pacioli la inconmesurabilidad del número áureo, y la inconmesurabilidad de Dios son equivalentes.
4. La Autosimilaridad asociada al número áureo; Pacioli la compara con la omnipresencia e invariabilidad de Dios.

5. Según Pacioli, de la misma manera en que Dios dio ser al Universo a través de la quinta esencia, representada por el dodecaedro; el número áureo dio ser al dodecaedro.

En 1525, Alberto Durero publica *Instrucción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas* donde describe cómo trazar con regla y compás la espiral basada en la sección áurea, que se conoce como "espiral de Durero".

El astrónomo Johannes Kepler (1571-1630), desarrolló un modelo Platónico del Sistema Solar utilizando los sólidos platónicos, y se refirió al número áureo en términos grandiosos

"*La geometría tiene dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea entre el extremo y su proporcional. El primero lo podemos comparar a una medida de oro; el segundo lo debemos denominar una joya preciosa*"

Johannes Kepler en *Mysterium Cosmographicum* (El Misterio Cósmico).

El primer uso conocido del adjetivo áureo, dorado, o de oro, para referirse a este número lo hace el matemático alemán Martin Ohm escribiendo:

"Uno también acostumbra llamar a esta división de una línea arbitraria en dos partes como éstas la sección dorada."

Martin Ohm en Las Matemáticas Puras Elementales

En los textos de matemáticas que trataban el tema, el símbolo habitual para representar el número áureo fue **τ** del griego **τομή** que significa corte o sección. Sin embargo, la moderna denominación **Φ** ó **φ**, la efectuó en 1900 el matemático Mark Barr en honor a Fidias ya que ésta era la primera letra de su nombre escrito en griego (**Φειδίας**).

Este honor se le concedió a **Fidias** por el máximo valor estético atribuido a sus esculturas, propiedad que ya por entonces se le atribuía también al número áureo. Mark Barr y Schooling fueron responsables de los apéndices matemáticos del libro The Curves of Live, de Sir Theodore Cook.

2.- Propiedades matemáticas

2.1. Φ es el único número real positivo tal que: $\varphi^2 = \varphi + 1$**.** La expresión anterior es fácil de comprobar:

$$\varphi^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\varphi + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Φ posee además las siguientes propiedades:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}$$
$$\varphi^3 = \frac{\varphi+1}{\varphi-1}$$

2.2. Las potencias del número áureo pueden ser escritas en función de una suma de potencias de grados inferiores del mismo número, estableciendo una verdadera sucesión recurrente de potencias.

El caso más simple es: $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$, cualquiera sea n entero positivo. Este caso es una sucesión recurrente de orden k = 2, pues se recurre a dos potencias anteriores.

Una ecuación recurrente de orden k tiene la forma $a_1u_{n+k-1} + a_2u_{n+k-2} + \ldots + a_ku_n$, donde a_i es cualquier número real o complejo y k es un número natural menor o igual a n y mayor o igual a 1. En el caso anterior es $k = 2$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$.

Pero podemos «saltear» la potencia inmediatamente anterior y escribir:

$\Phi^n = \Phi^{n-2} + 2\Phi^{n-3} + \Phi^{n-4}$. Aquí $k = 4$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$ y $a_4 = 1$.

En general:

$$\Phi^n = \sum_{i=0}^{\frac{1}{2}k} \binom{\frac{1}{2}k}{i} \Phi^{n - \left(\frac{1}{2}k + i\right)}$$

; $k \in \mathbb{N}$, k un número par, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}$.

En resumen: cualquier potencia del número áureo puede ser considerada como el elemento de una sucesión recurrente de órdenes 2, 4, 6, 8, ..., 2n; donde n es un número natural. En la fórmula recurrente es posible que aparezcan potencias negativas de Φ, hecho totalmente correcto. Además, una potencia negativa de Φ corresponde a una potencia positiva de su inverso, la sección áurea.

Este curioso conjunto de propiedades y el hecho de que los coeficientes significativos sean los del binomio, parecieran indicar que entre el número áureo y el número e hay un parentesco.

2.3. Representación mediante fracciones continuas. La expresión mediante fracciones continuas es:

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Esta iteración es la única donde sumar es multiplicar y restar es dividir. Es también la más simple de todas las fracciones continuas y la que tiene la convergencia más lenta. Esa propiedad hace que además el número áureo sea un número mal aproximable mediante racionales que de hecho alcanza el peor grado de aproximabilidad mediante racionales posible.

2.4. Representación mediante ecuaciones algebraicas

$$(\varphi)(\varphi - 1) = 1 \quad \longrightarrow \quad (\varphi)^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \longrightarrow \quad \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El número áureo y la sección áurea son soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$x^2 - \sqrt{5}\,x + 1 = 0$$

$$x^3 - y^3 - 4 = 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0 = (x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)$$

2.5. Representación trigonométrica

$$\begin{aligned}
\varphi &= 1 + 2\sin(\pi/10) = 1 + 2\sin 18^\circ \\
\varphi &= \frac{1}{2}\csc(\pi/10) = \frac{1}{2}\csc 18^\circ \\
\varphi &= 2\cos(\pi/5) = 2\cos 36^\circ \\
\varphi &= \frac{1}{2} sec \frac{2}{5}\pi = \frac{1}{2} sec 72^\circ
\end{aligned}$$

Estas corresponden al hecho de que el lado de un pentágono regular es φ veces la longitud de su radio y de otras relaciones similares en el pentágrama. En 1994 se derivaron las siguientes ecuaciones relacionando al número áureo con el número de la Bestia:

$$\frac{\varphi}{2} = -\sin 666^\circ = -\cos(6 \cdot 6 \cdot 6^\circ).$$

Lo que puede combinarse en la expresión:

$$\varphi = -\sin 666^\circ - \cos(6 \cdot 6 \cdot 6^\circ).$$

Sin embargo, hay que notar que estas ecuaciones dependen de que se elijan los grados sexagesimales como unidad angular, ya que las ecuaciones no se mantienen para unidades diferentes.

2.6. Representación mediante raíces anidadas

$$\varphi = \sqrt{1+\varphi} \quad \longrightarrow \quad \varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Esta fórmula como caso particular de una identidad general publicada por Nathan Altshiller-Court, de la Universidad de Oklahoma, en la revista American Mathematical Monthly, 1917. El teorema general nos dice que la expresión:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{a_4+\sqrt{\cdots+\sqrt{a_n}}}}}}$$

(donde $a_i = a$), es igual a la mayor de las raíces de la ecuación $\mathbf{x^2 - x - a = 0}$; o sea,

$$\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$$

2.7. Relación con la serie de Fibonacci

Si se denota el enésimo número de Fibonacci como F_n, y al siguiente número de Fibonacci, como F_{n+1}, descubrimos que a medida que n aumenta, esta razón oscila siendo alternativamente menor y mayor que la razón áurea. Podemos también notar que la fracción continua que describe al número áureo produce siempre números de Fibonacci a medida que aumenta el número de unos en la fracción.

Por ejemplo: 3/2= 1.5, 8/5= 1.6, y 21/13= 1.61538461..., lo que se acerca considerablemente al número áureo. Entonces se tiene que:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Esta propiedad fue descubierta por el astrónomo aleman Johannes Kepler, sin embargo, pasaron más de cien años antes de que fuera demostrada por el matemático inglés Robert Simson.
A mediados del siglo XIX el matemático francés Jacques Philippe Marie Binet redescubrió una fórmula que aparentemente ya era conocida por Leonhard Euler, y por otro matemático francés, Abraham de Moivre.

La fórmula permite encontrar el enésimo número de Fibonacci sin la necesidad de producir todos los números anteriores. La fórmula de Binet depende exclusivamente del número áureo:

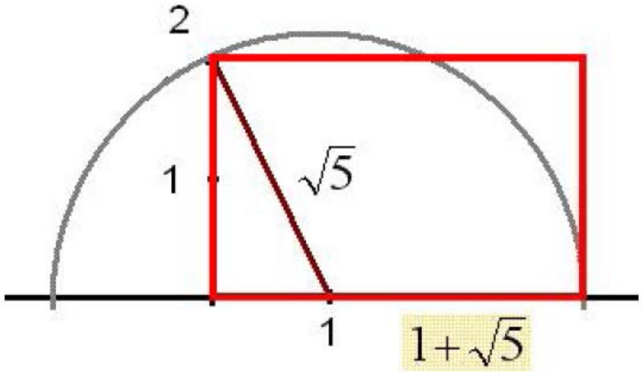
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \quad = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\phi)^n - \left(\frac{-1}{\phi}\right)^n\right]$$

2.8. El número áureo en la geometría

El número áureo y la sección áurea están presentes en todos los objetos geométricos regulares o semiregulares en los que haya simetría pentagonal, pentágonos o aparezca de alguna manera la raíz cuadrada de cinco.

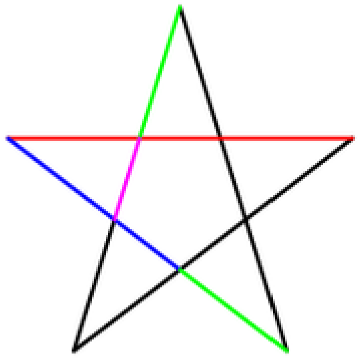
2.8.1. El rectángulo áureo de Euclides

Un rectángulo áureo será, por tanto, aquel que mantenga esta misma proporción entre sus lados. Construirlo es bien sencillo: Primero hacemos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 y 2; con centro en uno de los vértices no correspondientes al ángulo recto del triángulo construiremos una semicircunferenia de radio la hipotenusa. Uno de los lados del rectágulo será el cateto no usado para construir la semicircunferencia, y el otro lado será la suma de las medidas del otro cateto y el radio de ésta.



Los rectángulos de proporciones áureas tienen una importante propiedad, la diagonal de un rectángulo áureo contiene el vértice del mismo rectángulo colocado adyacentemente en sentido invertido. La imagen siguiente muestra la propiedad, que podemos comprobar con nuestro DNI por ejemplo:

2.8.2. En el pentagrama

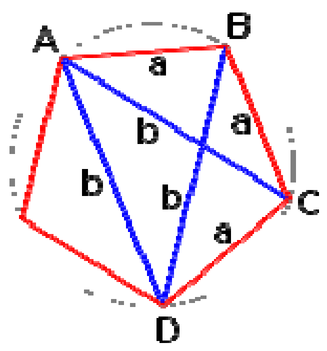


Pentagrama que ilustra algunas de las razones áureas: los segmentos rojo y azul, azul y verde, verde y morado. El número áureo tiene un papel muy importante en los pentágonos regulares y en los pentagramas. Cada intersección de partes de un segmento, intersecta a otro segmento en una razón áurea.

El pentagrama incluye diez triángulos isóceles: cinco acutángulos y cinco obtusángulos. En ambos, la razón de lado mayor y el menor es φ. Estos triángulos se conocen como los triángulos áureos.

Teniendo en cuenta la gran simetría de este símbolo se observa que dentro del pentágono interior es posible dibujar una nueva estrella, con una recursividad hasta el infinito. Del mismo modo, es posible dibujar un pentágono por el exterior, que sería a su vez el pentágono interior de una estrella más grande. Al medir la longitud total de una de las cinco líneas del pentáculo interior, resulta igual a la longitud de cualquiera de los brazos de la estrella mayor, o sea Φ. Por lo tanto el número de veces en que aparece el número áureo en el pentagrama es infinito al anidar infinitos pentagramas.

2.8.3. El teorema de Ptolomeo y el pentágono



Se puede calcular el número áureo usando el teorema de Ptolomeo en un pentágono regular. Claudio Ptolomeo desarrolló un teorema conocido como el teorema de Ptolomeo, el cual permite trazar un pentágono regular mediante regla y compás. Aplicando este teorema un cuadrilátero es formado al remover uno de los vértices del pentágono, Si las diagonales y la base mayor miden **b**, y los lados y la base menor miden **a**, resulta que $b^2 = a^2 + ab$ lo que implica:

$$\frac{b}{a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}.$$

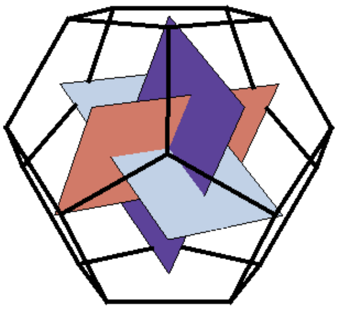
2.8.4. Relación con los sólidos platónicos

El número áureo esta relacionado con los sólidos platónicos, en particular con el icosaedro y el dodecaedro, cuyas dimensiones están dadas en términos del número áureo. Los vértices de un icosaedro puden darse en coordenadas cartesianas por los siguientes puntos:

(0,φ, 1), (0,φ, -1), (0, − φ, 1), (0, − φ, -1), (1, 0,φ), (1, 0, − φ), (-1, 0,φ), (-1, 0, − φ), (φ, 1, 0), (φ, -1, 0), (− φ, 1, 0), (− φ, -1, 0)

Los vértices de un dodecaedro también se puden dar en términos similares:

(0, φ,φ), (0,φ, − φ), (0, − φ,φ), (0, − φ, − φ), (φ, 0,φ), (φ, 0, − φ), (− φ, 0,φ), (− φ, 0, − φ), (φ,φ, 0), (φ, − φ, 0), (− φ,φ, 0), (− φ, − φ, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, 1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (-1, -1, -1)



Las 12 esquinas de los rectángulos coinciden con los centros de las caras de un dodecaedro. Para un dodecaedro con aristas de longitud a, su volumen y su área total se puden expresar también en términos del número áureo:

$$A = a\frac{15\phi}{\sqrt{3-\phi}}$$

$$V = a\frac{5\phi^3}{\sqrt{6-2\phi}}$$

Si tres rectángulos áureos se solapan paralelamente en sus centros, las 12 esquinas de los rectángulos áureos coinciden exactamente con los vértices de un icosaedro, y con los centros de las caras de un dodecaedro: El punto que los rectángulos tienen en común es el centro tanto del dodecaedro como del icosaedro.

3.- El número áureo en la Naturaleza, el Arte y la Música

3.1. En la Naturaleza

Podemos encontrar el número áureo en:

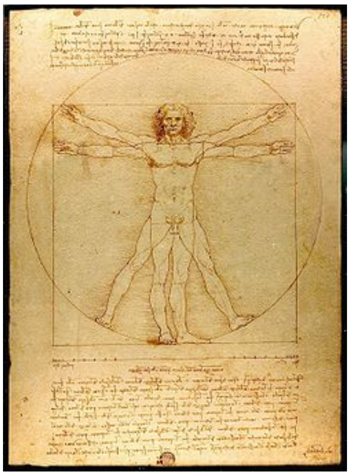
- Concha de nautilus en espiral logarítmica

- Cristales de Pirita dodecaédricos pentagonales (piritoedros)cuyas caras son pentágonos perfectos.
- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal.
- La disposición de los pétalos de las flores (el papel del número áureo en la botánica recibe el nombre de Ley de Ludwig).

- La relación entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a Φ tomando como unidad la rama superior).
- La distancia entre las espirales de una Piña.
- La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo.
- La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos.
- La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla.
- La relación entre el primer hueso de los dedos (metacarpiano) y la primera falange, o entre la primera y la segunda, o entre la segunda y la tercera, si dividimos todo es Φ.
- La relación entre el diámetro de la boca y el de la nariz

3.2. En el Arte y la música.

- En el **Hombre de Vitruvio** de Leonardo da Vinci.

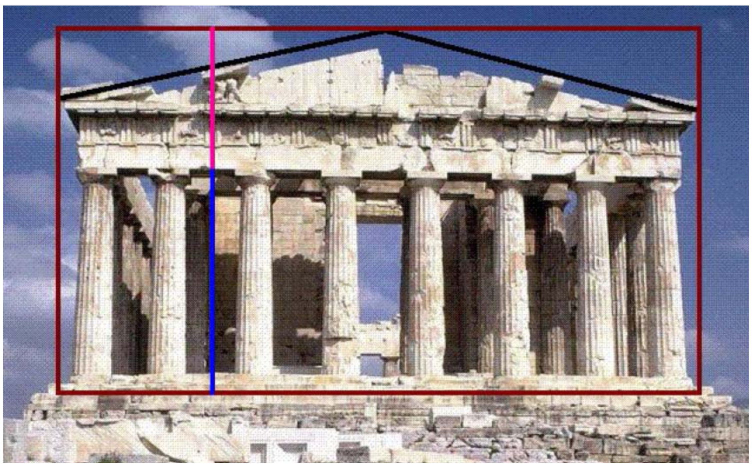


- Relaciones en la forma de la **Gran Pirámide de Gizeh**. La afirmación de Heródoto de que el cuadrado de la altura es igual a la superficie de una cara es posible únicamente si la semi-sección meridiana de la pirámide es proporcional al triángulo rectángulo

$$\left(1,\ \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}},\ \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right),$$

donde 1 representa proporcionalmente a la mitad de la base, la raíz cuadrada del número áureo a la altura hasta el vértice inexistente y el número áureo o hipotenusa del triángulo a la apotema de la Gran Pirámide.

- La relación entre las partes, el techo y las columnas del **Partenón**, en Atenas (s. V a. C.). Los rectángulos que forman la fachada como los de la planta sean rectángulos áureos. El diseño del Partenón griego esta totalmente basado en la sección dorada, su ancho, su altura y su profundidad están en relación dorada. La distribución de sus columnas y detalles se encuentran en esta misma proporción.



- En el **cuadro Leda atómica** de Salvador Dalí, hecho en colaboración con el matemático rumano Matila Ghyka.

- En la **novela** de Dan Brown ***El código Da Vinci*** aparece una versión desordenada de los primeros ocho números de Fibonacci (13, 3, 2, 21, 1, 1, 8, 5), que funcionan como una pista dejada por el curador del museo del Louvre, Jacques Saunière.

- En el episodio "Sabotaje" de la **serie de televisión *NUMBERS*** (primera temporada, 2005), el genio de la matemática Charlie Eppes menciona que el número *fi* se encuentra en la estructura de los cristales, en la espiral de las galaxias y en la concha del nautilus.

- En los **violines**, la ubicación de las efes (los "oídos", u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo.

- El compositor mexicano Silvestre Revueltas (1899-1945) utilizó también el número áureo en su obra ***Alcancías*,** para organizar las partes (unidades formales).

- El **grupo de rock** progresivo norteamericano ***Tool,*** en su disco Lateralus (2001) hacen múltiples referencias al número áureo y a la sucesión de Fibonacci, sobre todo en la canción que da nombre al disco, pues los versos de la misma están cantados de forma que el número de sílabas pronunciadas en cada uno van componiendo dicha secuencia. Además la voz entra en el minuto 1:37, que pasado al sistema decimal coincide muy aproximadamente con el número áureo. Zeysing notó la presencia de los números 3, 5, 8 y 13, de la Sucesión de Fibonacci, en el cálculo de los intervalos aferentes a los dos tipos de acordes perfectos. Los dos tonos del acorde mayor final, mi y do por ejemplo (la sexta menor o tercia mayor invertida en do mayor), están entre sí en la razón cinco octavos. Los dos tonos del acorde menor final, por ejemplo, mi bemol y do (sexta mayor o tercia transpuesta en do menor) dan la razón tres quintos.

- El **compositor** norteamericano **John Chowning** basó varios aspectos de su pieza por computador *Stria* (1976) en la proporción áurea, proyectandola en las relaciones de tiempo y frecuencia de los elementos que componen la obra. El clímax de la obra ocurre en el punto en el que la obra se divide en dos secciones de acuerdo con la proporción áurea. El sistema que se utiliza en esta obra para organizar las alturas está basado en seudo-octavas con relación de 1:1.618, diferente de la habitual relación 1:2. El instrumento de computadora usado para la pieza, basado en síntesis por modulación de frecuencias, tiene a las relaciones entre sus osciladores con base en la misma relación.

- En las **estructuras formales** de las sonatas de **Mozart**, en la *Quinta Sinfonía* de **Beethoven,** en obras de **Schubert** y **Debussý** (estos compositores probablemente compusieron estas relaciones de manera inconsciente, basándose en equilibrios de masas sonoras).

Bibliografía

- Webs:

http://www.wikipedia.org
http://www.google.com

- Libros de consulta:

Gardner, M. *Nuevos pasatiempos matemáticos.* Editorial Alianza Editorial
Rey Pastor, J. y Babini, J. *Historia de la matemática*. Gedisa Editorial.
Enriques, F. *"División de un segmento en la razón dada".* Editorial Moscú. 1976.
Ruiz López, F. *"Las Matemáticas en la Naturaleza".* Editorial Poseidón.
Hortelano Martínez, L. *"La sección áurea y la construcción de polígonos regulares."* Revista Suma, nº 5.
Hemenway, P. *"El código secreto" Springwood SA.*