Temas para la Educación
revista digital para profesionales de la enseñanza
Nº 4 - Septiembre 2009 | Federación de Enseñanza de CC.OO. de Andalucía | ISSN: 1989-4023 | Dep.Leg.: GR 2786-2008

Números famosos III: El número e.

Introducción

Si ingresamos en un banco 1€ al 100 por 100 anual, al cabo de un año tendremos 1+1=2 €. Si el abono de intereses se realiza mensualmente, al cabo del año tendremos

$$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=2{,}6130\ldots€$$

Así pues, el capital ha aumentado un 161,30 por 100. Si el abono de intereses se realiza diariamente, al cabo de un año tendremos

$$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}=2{,}7145\ldots€$$

Así pues, el capital ha aumentado un 171,45 por 100.

Un cliente muy avaro le plantea a su banco que quería que los intereses se los abonaran por hora. Después de estudiarlo el director del banco le mejoró la oferta, pues le abonarían los intereses por segundo. Teniendo en cuenta que un año tiene 31536000 segundos 1€ se convertirá en:

$$\left(1+\frac{1}{31536000}\right)^{31536000}=2{,}7182\ldots€$$

Nuestro avaro cliente nunca conseguirá llegar a los 3€.

1.- Origen del número e

Las primeras referencias a la constante fueron publicadas en 1618 en la tabla en un apéndice de un trabajo sobre logaritmos de John Napier.

No obstante, esta tabla no contenía el valor de la constante, sino que era simplemente una lista de logaritmos naturales calculados a partir de ésta. Se asume que la tabla fue escrita por William Oughtred.

El "descubrimiento" de la constante está acreditado a Jacob Bernoulli, quien estudió un problema particular del llamado *interés compuesto*. Si se invierte una *Unidad Monetaria* (que abreviaremos en lo sucesivo como *UM*) con un interés del 100% anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtendrán 2 UM. Si se pagan los intereses 2 veces al año, dividiendo el interés entre 2, la cantidad obtenida es 1 UM multiplicado por 1,5 dos veces, es decir 1 UM x $1{,}50^2$ = 2,25 UM. Si dividimos el año en 4 períodos (trimestres), al igual que la tasa de interés, se obtienen 1 UM x $1{,}25^4$ = 2,4414...En caso de pagos mensuales el monto asciende a 1 UM x $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$ = 2,61303...UMs. Por tanto, cada vez que se aumenta la cantidad de períodos de pago en un factor de *n* (que tiende a crecer sin límite) y se reduce la tasa de interés en el período, en un factor de $\frac{1}{n}$, el total de unidades monetarias obtenidas está expresado por la siguiente ecuación:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Bernoulli se dio cuenta de que esta expresión se aproxima al valor de 2,7182818...UMs. De aquí proviene la definición que se da de *e* en finanzas que expresa que este número es el límite de una inversión de 1 UM con una tasa de interés al 100% anual compuesto en forma contínua. En forma más general, una inversión que se inicia con un capital *C* y una tasa de interés anual *R*, proporcionará Ce^R UM con interés compuesto.

El primer uso conocido de la constante, representado por la letra *b*, fue en una carta de Gottfried Leibniz a Christiaan Huygens en 1690 y 1691.

Leonhard Euler comenzó a utilizar la letra *e* para identificar la constante en 1727, y el primer uso de *e* en una publicación fue en *Mechanica*, de Euler, publicado en 1736. Mientras que en los años subsiguientes algunos investigadores usaron la letra *c*, *e* fue la más común, y finalmente se convirtió en la terminología usual.

2.- Diferentes formas de introducir el número e.

El número e es un **número irracional trascendente**, es decir, es un número que no puede ser expresado como una fracción que no es raíz de ningún polinomio (no nulo) con coeficientes enteros (o racionales) y por tanto no pueden expresarse mediante radicales (ver Apéndice 1). Fue el primer número trascendente en virtud del teorema de Lindemann–Weierstrass (ver Apéndice 2) que fue probado como tal, siendo dada su demostración por Charles Hermite en 1873.

Además el número e es un **número normal** es un número real cuyas cifras en cualquier base están distribuidas siguiendo una distribución uniforme, siendo todas las cifras igualmente probables, así como todos los pares, tríos, etc. Las cifras de ese número son tanto los de su parte entera como la sucesión infinita de dígitos que hay detrás de la coma o parte fraccionaria.

Su valor es

$$e \approx 2,718281828459045 2354...$$

Hay muchas formas de definir o introducir el número e:

- La constante matemática ***e*** es el único número real que siendo usado como base de una función exponencial hace que la derivada de ésta en cualquier punto coincida con el valor de dicha función en ese punto. Así, la derivada de la función $f(x) = e^x$ es esa misma función. La función $\boldsymbol{e^x}$ es también llamada función exponencial, y su función inversa es el logaritmo natural, también llamado logaritmo en base ***e*** o logaritmo neperiano.

- El número ***e*** es uno de los números más importantes en la matemática junto con el número π, la unidad imaginaria *i* y el 0 y el 1, por ser los elementos neutros de la adición y la multiplicación, respectivamente. Curiosamente, la identidad de Euler

  $$e^{i\pi} + 1 = 0$$

  los relaciona de manera asombrosa. Además, en virtud de la fórmula de Euler, es posible expresar cualquier número complejo en notación exponencial matemática.

- La definición más común es que es el único número real cuyo logaritmo natural es 1:

  $$\ln e = 1$$

  lo que es obvio, al ser e la base de los logaritmos neperianos. Por supuesto, esta definición es válida siempre que previamente se haya definido la función logaritmo natural.

- La definición habitual según el cálculo integral es:

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

lo que significa que e se define por la relación:

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1$$

- Como fracción continua normalizada:

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}$$

- Como fracción simple continua infinita no normalizada:

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{5}{6 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{7}{8 + \cdots}}}}}}$$

- En 1975, el suizo Félix A. Keller da la siguiente fórmula:

$$e = \lim_{n \to \infty} \quad \frac{n^n}{(n-1)^{(n-1)}} - \frac{(n-1)^{(n-1)}}{(n-2)^{(n-2)}} \quad \text{para} \quad |n| > 2.$$

- Como serie numérica infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

que surge de evaluar la serie de potencias de e^x

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right).$$

en x=1.

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

- Otras series numéricas son:

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2(k!)}$$

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{5(k!)}$$

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{15(k!)}$$

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{52(k!)}$$

$$e = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^6}{203(k!)}$$

3.- Propiedades y aplicaciones

- La función exponencial $f(x) = e^x$ es importante, en parte debido a que es la única función no trivial que es su propia derivada:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

- Además, **e** es el límite de la sucesión de término general:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

- La propiedad se puede generalizar a una variable real, pasando del límite de una sucesión al de una función:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

- El número *e* presenta en la fórmula de Euler un papel importante relacionado con los números complejos:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

- El caso especial con $x = \pi$ es conocido como identidad de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

  de lo que se deduce que:

$$\log_e(-1) = i\pi.$$

  Además se obtiene:

$$(\cos x + i\sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n = e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

  que es la fórmula de De Moivre.

- La función $\boldsymbol{e^x}$ coincide con su derivada, y por lo tanto, esta función exponencial suele aparecer en el resultado de ecuaciones diferenciales sencillas de acontecimientos físicos como:

  - La velocidad de vaciado de un depósito de agua
  - El giro de una veleta frente a una ráfaga de viento
  - El movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil
  - El cimbreo de un edificio metálico en caso de terremoto.

  De la misma manera, describe otros fenómenos como la descarga de un condensador, la amplificación de corrientes en transistores BJT, crecimiento de células, concentración de iones, periodos de semidesintegración…

Apéndice 1: El número *e* es irracional

Lo demostraremos por **reducción al absurdo**.

Comenzamos mostrando una propiedad bien conocida del número ***e***:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \quad (1)$$

Supongamos ahora que podemos obtener ***e*** como cociente de dos enteros positivos (por la expresión anterior claramente *e* debe ser positivo), es decir:

$$e = \frac{p}{q} \quad (2)$$

siendo ***p*** y ***q*** enteros positivos. Multiplicamos la expresión (1) por ***q!*** a ambos lados, obteniendo:

$$q!e = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \ldots + \frac{q!}{q!} + \ldots \quad (3)$$

Por (2) tenemos que ***q!e*** es un número entero, y claramente la parte de la suma que aparece explícitamente en (3) también es un número entero. Por tanto la diferencia entre ellos, digamos ***R***, también será un número entero (y positivo). Veamos qué forma tiene ***R***:

$$R = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \ldots$$

Simplificamos:

$$R = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots$$

Como ***q + 2 > q + 1, q + 3 > q + 1***, etc, se cumple la siguiente desigualdad:

$$R = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \ldots <$$
$$< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \ldots$$

Sacando factor común y usando la fórmula de la suma de una progresión geométrica:

$$R < \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + ...\right) =$$

$$= \frac{1}{(q+1)} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}}\right) = \frac{1}{(q+1)} \cdot \frac{(q+1)}{q} = \frac{1}{q} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow R < \frac{1}{q}$$

Pero ***q*** era un entero positivo, por tanto ***q > 1***. En consecuencia su inverso será menor que 1. Tenemos entonces que ***R*** es un número entero positivo que cumple la siguiente cadena de desigualdades:

$$0 < R < \frac{1}{q} < 1$$

Pero como no existe ningún número entero entre 0 y 1 tenemos que la esta situación no puede darse. Es decir, hemos llegado a una CONTRADICCIÓN que partió del hecho de suponer que ***e*** era racional. Por tanto, utilizando reducción al absurdo, obtenemos que **el número *e* es un número irracional.**

Apéndice 2: El número *e* es trascendente.

El **teorema de Lindemann–Weierstrass** es un resultado muy útil para establecer la trascendencia de un número. Afirma que si α_1, α_2, ...,α_n son números algebraicos linealmente independientes sobre el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, entonces $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \ldots, e^{\alpha_n}$ son algebraicamente independientes sobre $\mathbb{Q}$; es decir, el grado de trascendencia de la extensión del cuerpo $\mathbb{Q}(e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n})$ sobre $\mathbb{Q}$ es *n*.

Lindemann demostró en 1882 que e^{α} es trascendente para todo α algebraico no nulo, y de este modo estableció que π es transcendente.

Bibliografía

- Webs:

http://www.wikipedia.org
http://www.google.com

- Libros de consulta:

Negro, A. y Benedicto C. (1982). *Matemáticas 3º BUP.* Editorial Alhambra.
Castellet, M. y Llerena , J. (1991). *Álgebra y Geometría*. Editorial Reverté.
Rey Pastor, J. y Babini, J. *Historia de la matemática*. Gedisa Editorial
Ruiz López, F. *"Las Matemáticas en la Naturaleza".* Editorial Poseidón.